INTEGRAL

disusun oleh :
1. Meilany Nonsi Tentua, S.Si, M.T
2. Yus Hariadi (08.11.2104)

1. Pengertian Integral

INTEGRAL merupakan kebalikan dari differensial (anti differensial).

Integral dapat digolongkan atas :

Definisi :

Kita sebut F suatu anti turunan dari f pada selang I jika DF = f pada I - yakni, jika F'(x) = f(x) untuk semua x dalam I. (jika x suatu titik ujung I, F'(x) hanya per-lu berupa turunan satu sisi).

2. Notasi Anti Turunan

Notasi turunaN yang sering digunakan adalah notasi asal Liebniz yaitu $\int \cdots dx$, dan dituliskan :

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Dan

$$\int 4x^3 dx = x^4 + C$$

***Teorema A** : Aturan Pangkat*

(Aturan Pangkat). Jika r adalah sembarang bilangan rasional kecuali –1 maka :

$$\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

$$\int 1\, dx = x + C$$

Contoh Soal :

Carilah Antiturunan yang umum dari $f(x) = x^{4/3}$

Penyelesaian

$$\int x^{4/3}dx = \frac{x^{7/3}}{\frac{7}{3}} + C = \frac{3}{7}x^{7/3} + C$$

Teorema B :

$$\int sin\ x.dx = -cos\ x + C \qquad \int cos\ x.dx = sin\ x + C$$

Integral tak tentu (Tanpa batas)

Integral tak tentu adalah suatu bentuk operasi pengintegralan suatu fungsi yang menghasilkan suatu fungsi baru. fungsi ini belum memiliki nilai pasti (berupa variabel) sehingga cara pengintegralan yang menghasilkan fungsi tak tentu ini disebut integral tak tentu.

***Teorema C** : Integral Tak-tentu adalah Operator Linier*

(kelinearan dari $\int \dots\ dx$). Andaikan f dan g mempunyai anti turunan(integral tak tentu) dan andaikan k suatu konstanta. Maka :

i. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

ii. $\int[f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

iii. $\int[f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

***Teorema D** : Aturan Pangkat yang Digeneralisir*

(Aturan pangkat yang diperumum), Andaikan g suatu fungsi yang dapat di deferensialkan dan r suatu bilangan rasional yang bukan -1. Maka :

$$\int [g(x)]^r g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

1. **Integral Tentu (Dengan batas)**

Definisi :

(Integral Tentu). Andaikan f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tutup [a,b]. jika :

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

kita katakana f adalah terintegralkan pada [a, b]. lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$, disebut integral tentu(atau integral Riemann) f dari a ke b, diberikan oleh

. $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Secara umum $\int_a^b f(x)dx$ menyatakan batasan luas daerah yang tercakup di antara kurva y = f(x) dan sumbu x dalam selang [a,b], yang berarti bahwa tanda positif akan diberikan pada luas bagian bagian yang berada di atas sumbu x. dan tanda negatif yang dibawah sumbu x, secara simbolik :

$$\int_a^b f(x)dx = A_{atas} + A_{bawah}$$

***Teorema A** : Teorema Keintegrasian*

Jika f terbatas pada $[a, b]$ dan f kontinu kecuali pada sejumlah titik yang berhingga, maka f terintegrasikan pada $[a, b]$. Khususnya jika f kontinu pada seluruh selang $[a, b]$, maka f terintegrasikan pada $[a, b]$.

Sebagai konsekuensi dari teorema ini, fungsi-fungsi berikut terintegrasikan pada setiap selang tertutup $[a, b]$.

1. Fungsi Polinominal
2. Fungsi Sinus dan Kosinus
3. Fungsi Rasional, asalkan selang $[a, b]$ tidak mengandung titik-titik yang mengakibatkan penyebut 0.

***Teorema B** : Sifat Tambahan pada Selang (Interval Additive Property)*

Jika f terintegrasikan pada sebuah selang yang mengandung titik-titik a, b, dan c, maka

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx$$

Tidak perduli apapun orde *a, b, dan c*.

Contohnya

$$\int_0^2 x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x^2 dx$$

Yang oleh sebagian besar orang telah dianggap benar bahwa

$$\int_0^2 x^2 dx = \int_0^3 x^2 dx + \int_3^2 x^2 dx$$

5. Teorema Dasar Kalkulus Pertama

***Teorema A** : Teorema dasar Kalkulus Pertama*

Andaikan f kontinue(Karena terintegralkan) pada [a,b] dan andaikan x sebagai sebuah titik (peubah) pada *(a, b)* maka:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

***Teorema B** : Sifat Perbandingan*

Jika *f* dan *g* terintegrasikan pada $[a, b]$ dan jika *f (x)* ≤ *g (x)* untuk semua *x* dalam $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Dalam bahasa informal tetapi cukup deskriptif, kita mengatakan bahwa integral tentu mempertahankan ketaksamaan.

Bukti misalnya P:*a* = $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ sebagai partisi sebarang dari $[a, b]$, dan untuk tiap-tiap I anggaplah $\bar{x}_i$, sebagai titik contoh pada selang bagian ke-*I* $[x_{i-1}, x_i]$. kita dapat menyimpulkan secara berurutan bahwa

$$f(\bar{x}_i) \le g(\bar{x}_i)$$

$$f(\bar{x}_i)\Delta x_i \le g(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

$$\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \le \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

***Teorema C** : Sifat Keterbatasan*

Jika f terintegrasikan pada selang $[a,b]$ dan $m \leq f(x) \leq M$ untuk semua x dalam $[a,b]$, maka

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

***Teorema D** : Kelinearan Integral Tentu*

Andaikan bahwa *f* dan *g* terintegralkan pada [a,b] dan bahwa k konstanta. Maka *kf* dan *f* + *g* adalah terintegralkan dan :

i. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b kf(x)dx$

ii. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx; dan\ akibatnya$

iii. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx;$

6. Teorema Dasar Kalkulus Kedua dan Teorema Nilai Rata-rata Untuk Integral

***Teorema A** : Teorema Dasar Kalkulus Kedua*

Anggaplah f kontinu (dan terintegrasikan) pada selang $[a,b]$, dan anggaplah F sebarang antiturunan *f* pada $[a,b]$, jadi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Bukti Untuk x pada selang $[a,b]$ defenisikan $G(x) = \int_a^x f(t)$. maka , dengan teorema Dasar Kalkulus Pertama, $G'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam selang $[a,b]$. Jadi G adalah antiturunan *f;* tetapi F juga antiturunan *f*.

***Teorema B** : Teorema Nilai Rata-rata untuk Integral*

Jika f kontinu pada $[a,b]$, maka terdapat suatu bilangan c antara a dan b sedemikian rupa sehingga

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$$

Bukti Andaikan

$$G(x) = \int_a^b f(t)dt, \qquad a \le x \le b$$

Menurut Teorema Nilai Rata-rata untuk Turunan yang diterapkan pada G, terdapat suatu titik c dalam (a, b) sedemikian rupa sehingga

$$G(b) - G(a) = G'(c)(b-a)$$

Yakni,

$$\int_a^b f(t)dt - 0 = G'(c)(b-a)$$

Tetapi Menurut Teorema Dasar Kalkulus Pertama G'(c) = *f*(c). perhatikan bahwa jika kita menyelesaikan untuk *f(c)* dalam kesimpulan Teorema B, kita memperoleh :

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a}$$

BAB II

KESIMPULAN

Integral adalah pembelajaran kalkulus yang sebagian orang mengatakan adalah materi yang rumit, akan tetapi Integral memiliki perhitungan yang sangat kompleks dalam menyelesaikan beberapa kasus.

Rumus-rumus Integrasi dibawah ini adalah rumus-rumus dasar dalam Integral :

Umum

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)] \, dx = f(x) + C$$

$$\int (u+v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx$$

$$\int au \, dx = a \int u \, dx$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{lna} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$$

Bilangan Natural

$$\int e^u du = e^u + C$$

Logaritma

$$\int \log_b(x) \, dx = x \log_b(x) - \frac{x}{\ln(b)} + C = x \log_b\left(\frac{x}{e}\right) + C$$

Trigonometri

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

$\int x^3 dx$

jawab :

$\int (2x^2 + 5x - 3)dx$

jawab :

$\int x^2 \sqrt{x^3 + 2}$ dx

jawab :

$\int \frac{8x^2}{(x^3 + 2)}dx$

jawab :

fungsi :

jawab :